FORUM STATISTICUM SLOVACUM Vol XVI (2020) No 2 pp 27-40

# Vybrané metodologické aspekty aplikácie DEA pri meraní efektívnosti jednotiek
# Selected methodological aspects of applying DEA in measuring efficiency of units

Viera Mendelová[a], Pavol Kráľ[a]

[a] Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Ekonomická fakulta, Katedra kvantitatívnych metód a informačných systémov, Tajovského 10, 975 90 Banská Bystrica, Slovenská republika.

[a] Matej Bel University in Banská Bystrica, Faculty of Economics, Department of Quantitative Methods and Information Systems, Tajovského 10, 975 90 Banská Bystrica, Slovakia.

viera.mendelova@umb.sk, pavol.kral@umb.sk

***Abstrakt:*** *DEA (data envelopment analysis) predstavuje flexibilný nástroj merania relatívnej efektívnosti jednotiek. Príspevok stručne prezentuje jednotlivé kroky aplikácie DEA a poskytuje prehľad možných problémov, ktoré pri jej aplikácii môžu nastať spolu s odkazmi na relevantnú literatúru. Príspevok navyše systematizuje základné metodické postupy DEA v snahe zracionalizovať proces výberu vhodného DEA modelu vzhľadom na špecifické podmienky riešeného problému.*

***Abstract:*** *DEA (data envelopment analysis) is a flexible tool for measuring relative efficiency of units. The paper presents a concise guidance through individual steps of DEA application. It includes overview of possible issues together with recommendations of possible solutions supported by references to relevant literature. In addition, the paper systematizes the basic methodological procedures of DEA in an effort to streamline the process of selecting a suitable DEA model in relation to the specific conditions of the problem investigated.*

***Kľúčové slová:*** *efektívnosť, DEA, kroky analýzy.*

***Key words:*** *efficiency, data envelopment analysis, steps of analysis.*

## 1 Úvod

DEA (data envelopment analysis), ktorá bola prvýkrát predstavená v práci Charnesa et al. (1978) predstavuje metodiku lineárneho programovania (LP) určenú na meranie relatívnej efektívnosti súboru tzv. samostatne rozhodovacích jednotiek (decision making units – DMUs). DEA vychádza z neparametrickej Farrellovej (1957) konštrukcie hranice produkčných možností (production possibility frontier – PPF), pričom hlavná myšlienka spočíva v stanovení mier relatívnej efektívnosti DMUs na základe ich vzdialenosti od takto skonštruovanej PPF.

V posledných štyroch desaťročiach vzniklo množstvo článkov a kníh o teórii DEA a jej aplikáciách na rôzne oblasti rozhodovania. Prehľad tých najvýznamnejších možno nájsť napr. v práci Cooka a Seiforda (2009) či Liua et al. (2013). DEA sa stala teoreticky fundovanou metodológiou s preukázaným

počtom úspešných aplikácií. To všetko robí túto metódu atraktívnym nástrojom na podporu rozhodovania v najrôznejších reálnych aplikáciách.

Pomerne veľké množstvo dostupných softvérových nástrojov a zdanlivo nenáročné požiadavky kladené na vstupné údaje však vytvárajú dojem, že aplikácia DEA je jednoduchá a univerzálne použiteľná. Treba však zdôrazniť, že korektná a zmysluplná aplikácia DEA nie je priamočiara a je nutné podrobne analyzovať všetky aspekty, ktoré na hodnotenie efektívnosti daných DMUs môžu mať vplyv. Každý, kto má v úmysle správne používať DEA ako podporný nástroj rozhodovania, by mal mať aspoň základné vedomosti o teórii, ktorá stojí za rôznymi modelmi DEA a/alebo mať možnosť konzultovať jej použitie s odborníkom na problematiku DEA.

Samotná aplikácia DEA vo všeobecnosti predstavuje niekoľko po sebe nasledujúcich krokov, ktorých definovaniu sa venovalo už viacero autorov (napr. Golany a Roll, 1989; Ramanathan, 2003; Ozbek et al., 2009; Emrouznejad a De Witte, 2010). V každom z týchto krokov existujú určité kľúčové predpoklady a postupy, ktoré je potrebné dodržať. V jednotlivých krokoch analýzy však môžu nastať i rôzne problémy a v záujme dosiahnutia dôveryhodných výsledkov je ich potrebné zodpovedajúcim spôsobom riešiť. V tejto súvislosti môžu zohrať dôležitú úlohu metodicky zamerané články, ktoré sumarizujú dôležité aspekty metodiky a poskytujú návody na to, kde nájsť odpoveď na konkrétny problém. Cieľom tohto príspevku je poskytnúť stručný návod na to, ako je potrebné postupovať pri jednotlivých krokoch aplikácie DEA a systematizovať základné metodické postupy DEA v snahe zracionalizovať proces výberu vhodného DEA modelu vzhľadom na špecifické podmienky riešeného problému.

## 2 Kroky aplikácie metódy DEA

Z metodologického hľadiska, samotná aplikácia metódy DEA by sa mala realizovať v určitom slede na seba nadväzujúcich krokov: (1) formulácia problému a stanovenie cieľového stavu, (2) definovanie a výber DMUs, (3) definovanie a výber vstupov a výstupov, (4) výber a formulácia DEA modelu, (5) kalkulácia DEA modelu, (6) analýza stability výsledkov a (7) prezentácia a analýza výsledkov.

### 2.1 Formulácia problému a stanovenie cieľového stavu

Základným predpokladom uplatnenia DEA je existencia určitého problému. Vo všeobecnosti je základným cieľom každého rozhodovania budúci, želateľný stav určitého problému. Tento cieľ nadobúda pri uplatnení DEA predovšetkým formu identifikácie najefektívnejších jednotiek (podnikov, pobočiek, oddelení, zamestnancov, procesov, a pod.) a/alebo identifikácie odporúčaní na zvýšenie ich relatívnej efektívnosti. Nevyhnutným predpokladom aplikácie DEA je teda

pomerne presná formulácia cieľového stavu riešeného problému, ktorý sa má analýzou dosiahnuť.

Keďže DEA poskytuje neparametrické odhady PPF, základným predpokladom jej aplikácie je, aby každý takýto problém zahŕňal istým spôsobom určitý *transformačný proces*. Tento transformačný proces môže byť buď *skutočný*, v ktorom sú dobre známe vstupy a výstupy, alebo *umelý*, kde existuje len niekoľko poznatkov o tom, aké premenné v ňom môžu hrať úlohu vstupov a výstupov. Aj keď v obidvoch prípadoch možno DEA použiť, druh transformačného procesu (skutočný alebo umelý) stanovuje limity pre interpretáciu alebo aplikáciu DEA výsledkov. Výsledky získané z DEA, pri skutočnom transformačnom procese poskytujú bezpochyby jasnejšiu a priamočiarejšiu interpretáciu a môžu byť jednoduchšie transformované do poznatkov, aké sú kľúčové zdroje identifikovanej neefektívnosti DMUs a aké úpravy vstupov a/alebo výstupov sú potrebné na zvýšenie ich relatívnej efektívnosti.

## 2.2 Definovanie a výber DMUs

Ak riešený problém zahrnuje nejaký druh transformačného procesu, následne je potrebné identifikovať všetky objekty záujmu, ktorých relatívna efektívnosť nás zaujíma, tzn. identifikujú sa všetky potenciálne DMUs. Súbor porovnávaných DMUs by mal predovšetkým spĺňať podmienku nezávislosti a homogénnosti (porovnateľnosti).

*Podmienka homogénnosti*

Podmienka homogénnosti je kľúčovým predpokladom DEA a je možné ju dosiahnuť napríklad splnením nasledujúcich kritérií (Dyson et al., 2001; Ozbek et al., 2009; Golany a Roll, 1989):

1 DMUs by mali plniť podobný charakter úloh s podobnými cieľmi,
2 vstupno-výstupné premenné charakterizujúce činnosť DMUs by mali byť identické, s výnimkou rozdielov v ich intenzite alebo rozsahu a
3 DMUs by mali fungovať v rovnakých trhových a environmentálnych podmienkach.

Zatiaľ čo prvé dve kritériá predstavujú kritériá homogénnosti samotných DMUs, tretie kritérium predstavuje kritérium homogénnosti prostredia DMUs. V mnohých prípadoch je však homogénnosť DMUs alebo homogénnosť prostredia zriedka prítomná. V prípade, že nie je splnená podmienka homogénnosti, je potrebné použiť niektorú zo špeciálnych techník navrhovaných pre dané prípady. Aplikácia konvenčných DEA postupov môže mať v týchto prípadoch za následok to, že miery efektívnosti budú odrážať skôr heterogénnosť daných DMUs ako nejakú formu neefektívnosti.

Kým Molinero et al. (2008), Li et al. (2016) a Cook et al. (2013) poskytujú špeciálne prístupy využiteľné v prípade nehomogénnosti DMUs, prehľad tradičných prístupov aplikovateľných v prípade nehomogénneho prostredia poskytuje napr. Coelli et al. (2005).

*Podmienka nezávislosti*

Všeobecne sa predpokladá, že DMUs sú navzájom nezávislé, tzn. že každá DMU má svoje vlastné množstvá vstupov a výstupov. V prípade nezávislosti DMUs, zníženie vstupov alebo zvýšenie výstupov jednej DMU nemá vplyv na vstupy alebo výstupy ostatných DMUs. Tento prirodzený predpoklad však nie je v skutočných podmienkach vždy splnený. Podmienka vzájomnej nezávislosti DMUs nie je napríklad splnená v prípadoch, keď (1) DMUs majú nejaké spoločné (zdieľané) vstupy, alebo (2) existujú nejaké interné alebo prepojovacie činnosti medzi DMUs.

Pre prípad existencie spoločných (zdieľaných) vstupov Avilés-Sacoto et al. (2020) vyvinuli novú metodológiu podobnú DEA a ilustrovali ju na súbore katedier v prostredí univerzity, kde sú katedry zoskupené pod rôznymi fakultami.

Príkladom porušenia nezávislosti z dôvodu existencie určitých interných alebo prepojovacích činností medzi DMUs je, že veľa spoločností pozostáva z niekoľkých divízií, ktoré sú prepojené nejakými medziproduktmi alebo činnosťami. Niektoré DMUs v tejto viacstupňovej štruktúre spotrebúvajú výstupy vygenerované inými DMUs a naopak niektoré DMUs zas generujú výstupy, ktoré sú spotrebovávané inými DMUs. Jeden faktor preto môže pre niektoré DMUs vystupovať ako výstup a pre iné DMUs ako vstup. Meranie efektívnosti vzájomne prepojených DMUs sa stáva zložitou a náročnou úlohou z dôvodu potreby zaoberať sa viacerými medziproduktmi a integrovať a koordinovať efektívnosť hodnotených DMUs. V kontexte DEA bolo vyvinutých niekoľko špeciálnych prístupov, ktoré sú v týchto prípadoch aplikovateľné. Färe a Whittaker (1995) vyvinuli tzv. sieťovú DEA (Network DEA) na modelovanie všeobecných viacstupňových procesov. Počet sieťových modelov DEA zaznamenal v posledných rokoch prudký nárast. Všeobecná klasifikácia sieťových DEA modelov je spracovaná napr. v štúdii Kaoa (2014).

## 2.3 Definovanie a výber vstupov a výstupov

Na účely merania efektívnosti je v tomto kroku potrebné definovať okruh relevantných vstupov a výstupov, ktoré charakterizujú transformačný proces porovnávaných DMUs. Počiatočný zoznam vstupov a výstupov by mal obsahovať všetky relevantné a vhodné faktory, ktoré ovplyvňujú efektívnosť DMUs a ktoré úzko súvisia so stanovenými cieľmi DMUs (Golany a Roll, 1989; Ozbek et al., 2009]). Avšak pri nízkom počte porovnávaných DMUs nie je možné túto

požiadavku úplne uspokojiť. Vysoký počet vstupov a výstupov vo vzťahu k počtu uvažovaných DMUs môže v praxi viesť k zníženiu diskriminačnej schopnosti DEA. V DEA literatúre existuje niekoľko verzií podmienok týkajúcich sa počtu pozorovaní ($n$) vo vzťahu k počtu vstupov ($m$) a počtu výstupov ($s$). Napríklad Golany a Roll (1989) navrhli, aby $n$ bolo väčšie ako $2 \times (m + s)$, zatiaľ čo napr. Cooper et al. (2007) navrhli, aby $n$ bolo väčšie ako $3 \times (m + s)$. Dyson (2001) a Ozbek et al. (2009) zas odporúčajú, aby $n$ bolo väčšie ako $2 \times m \times s$.

Veľmi často nemôžeme využiť všetky premenné týkajúce sa transformačného procesu a musíme sa obmedziť na výber vhodných vstupných a výstupných premenných, ktoré môžu alebo nemusia byť vhodnou reprezentáciou transformačného procesu. Ak transformačný proces prebieha, zvyčajne sa to prejaví existenciou korelácií medzi niektorými premennými nameranými na DMUs. Ak ide o skutočný transformačný proces, očakáva sa prítomnosť významných korelácií medzi premennými identifikovanými ako vstupy a premennými identifikovanými ako výstupy. Zároveň sa očakáva identifikácia slabých alebo neexistujúcich korelácií medzi vstupnými premennými a medzi výstupnými premennými. Na druhej strane, ak je transformačný proces umelý, prítomnosť alebo nedostatok korelácií možno použiť na usmernenie identifikácie a výberu vhodných vstupov a výstupov. Tu je však nutné poznamenať, že absencia alebo (ne)prítomnosť párových korelácií v údajoch by sa však nemala používať ako nástroj na rozhodnutie, či by sa DEA môže alebo nemôže pri danom probléme použiť. Úloha korelácií je skôr podporná a orientačná. Možno len predpokladať, že ak sú v dátach korelácie koherentné s našimi predpokladmi o transformačnom procese, je pravdepodobnejšie, že výsledky a interpretácie DEA budú zmysluplnejšie.

Okrem spomenutej analýzy korelácii sa v DEA literatúre vyvinulo niekoľko ďalších špecializovaných prístupov k výberu vhodných premenných. Možno ich klasifikovať do nasledujúcich troch skupín:

4 prístupy založené na ex-ante výbere podmnožín pôvodných premenných (napr. Golany a Roll, 1989; Banker, 1996 a Simar a Wilson, 2001),
5 prístupy založené na nahradení pôvodných premenných agregovanými premennými (napr. Simar a Wilson, 2001; Adler a Golany, 2001; Nataraja a Johnson, 2011),
6 prístupy založené na zahrnutí dodatočných podmienok priamo do DEA úlohy LP, aby sa automaticky vybrali vhodné vstupy a výstupy (napr. Limleamthong a Guillen-Gosalbez, 2018; Peyrache et al., 2020).

## 2.4 Výber a formulácia DEA modelu

Voľba správneho DEA modelu na riešenie skúmaného problému je veľmi dôležitá a rozhodne netriviálna otázka. K dnešnému dňu bolo vyvinuté veľké množstvo rôznych DEA prístupov, takže poskytnúť úplný prehľad o všetkých by bolo nereálne. Z tohto dôvodu bude v tejto časti venovaná hlavná pozornosť základným oblastiam, ktoré by mohli analytika viesť tým správnym smerom. Pri výbere vhodného DEA modelu sú kritickými oblasťami najmä: (1) voľba radiálneho, neradiálneho alebo hybridného DEA prístupu, (2) voľba orientácie DEA modelu a (3) voľba predpokladu o výnosoch z rozsahu.

*Voľba radiálneho, neradiálneho alebo hybridného DEA prístupu*

V DEA existujú dva základné typy prístupov: radiálny a neradiálny. Radiálny prístup, zastúpený napr. modelmi CCR (Charnes et al., 1978) a BCC (Banker et al., 1984), poskytuje radiálnu mieru efektívnosti, ktorá sa zvykne označovať ako Farrellova efektívnosť (pri CCR modeli) alebo ako čistá technická efektívnosť (pri BCC modeli). Na druhej strane, neradiálny prístup, zastúpený napr. aditívnym modelom (Charnes et al., 1985) alebo SBM modelom (Tone, 2001) meria neradiálnu efektívnosť, ktorá sa zvykne označovať ako Paretova-Koopmansova efektívnosť.

Oba prístupy majú určité výhody, ale aj nevýhody. Zatiaľ čo radiálne prístupy nezahrňujú do miery efektívnosti neradiálne (neproporcionálne) vstupné a výstupné sklzy, neradiálne prístupy zanedbávajú radiálne charakteristiky vstupov a/alebo výstupov. Z tohto dôvodu je potrebné podrobne zvážiť, ktorý z týchto prístupov použiť vo vzťahu k špecifikám riešeného problému. Konečný výber by mal byť založený predovšetkým na zvážení potenciálnych rozdielov v charaktere vstupov a výstupov. Všeobecné pravidlo často formulované v DEA literatúre je, že ak majú neradiálne sklzy dôležitú úlohu pri hodnotení efektívnosti, mali by sa uprednostniť neradiálne prístupy, zatiaľ čo ak je strata pôvodnej proporcionality vstupov a/alebo výstupov pre analýzu nežiadúca, sú vhodnejšie radiálne prístupy. Takto formulované pravidlo je však v praxi pomerne ťažko čitateľné nakoľko v mnohým prípadoch je pomerne náročné zhodnotiť, čo je „dôležitá úloha“ alebo čo znamená „pôvodná proporcionalita“. Pri hľadaní odpovede na to, aký prístup je vhodný vzhľadom na daný problém možno uplatniť nasledujúcu úvahu.

Základným predpokladom DEA je, že všetky vstupy a výstupy sú do istej miery substituovateľné. Na tomto predpoklade DEA konštruuje PPF, vzhľadom ku ktorej je efektívnosť DMUs meraná. Je však zrejmé, že nie všetky vstupy a výstupy musia byť rovnako dobre substituovateľné. Možnosti substitúcie vstupov (transformácie výstupov) môžu byť pre rôzne vstupy (výstupy) rôzne. Pri

relatívne dobrej substitúcii vstupov (transformácii výstupov) existuje nekonečné množstvo ich vzájomných kombinácií, ktoré sú rovnako efektívne. Preto ak sú všetky vstupy a výstupy uvažované v analýze dobré substitúty (v DEA literatúre označované aj ako *radiálne premenné*), nie je dôvod hľadať nevhodné proporcie medzi nimi a mal by sa uprednostniť radiálny prístup k meraniu efektívnosti. Na druhej strane však môžu existovať aj tzv. zlé substitúty (v DEA literatúre označované aj ako *neradiálne premenné*), pri ktorých je substitúcia pomerne zložitá a je možné voliť iba obmedzený počet ich vzájomných kombinácií. Možných príkladom je, že na produkciu nejakého výstupu sú prípustné určité kombinácie dvoch vstupov, ktoré sú rovnako efektívne, no pre dané vstupy existujú určité dolné limity, ktoré udávajú minimálne potrebné množstvá vstupov na produkciu danej úrovne výstupu. Tieto dolné limity pre vstupy ohraničujú oblasť efektívnych kombinácií medzi vstupmi. Ak sa použije dolný limit pre prvý vstup, dodatočné zvyšovanie druhého vstupu neprispeje k zvýšeniu výstupu, a je teda znakom neefektívnosti. Použitie vstupov v iných proporciách, ako sú tie, ktoré sú ohraničené dolnými hranicami vstupov, možno považovať za znak neefektívnosti. Podobnú úvahu možno uplatniť aj pri výstupoch, kde možnosti technickej transformácie nemusia byť dobré a môžu existovať určité limity výstupov. V prípadoch, keď substitúcia (transformácia) všetkých vstupov a výstupov je pomerne zložitá, v záujme zachytenia neradiálnej (neproporcionálnej) neefektívnosti (v DEA literatúre označovanej aj ako *mix efektívnosť*) je vhodnejšie voliť neradiálny prístup. Ten zachytí prípadnú nevhodnosť proporcií medzi vstupmi a výstupmi.

V reálnych podmienkach však vstupy a/alebo výstupy rôznych DMUs zvyčajne neobsahujú iba jeden typ premenných. V aplikáciách, v ktorých navzájom úzko súvisia iba niektoré zo vstupov a/alebo výstupov, tzn. sú prítomné radiálne aj neradiálne premenné, je v záujme dosiahnutia zmysluplných výsledkov potrebné aplikovať niektorý z pokročilejších prístupov (napr. Tone, 2004; Mehdiloo a Podinovski, 2019). Za pomerne jednoduchý a praktický prístup aplikovateľný v týchto prípadoch možno považovať prístup Tonea (2004)[1], ktorý integroval radiálne a neradiálne prístupy do jednotného rámca a navrhol tzv. hybridný DEA model. Ten umožňuje pracovať s podskupinami radiálnych a neradiálnych premenných a poskytuje tzv. hybridnú mieru efektívnosti, ktorú možno v záujme hľadania zdrojov neefektívnosti rozložiť na radiálnu efektívnosť a neradiálnu efektívnosť.

[1] Tento prístup bol neskôr hlbšie rozpracovaný Cooperom et al. (2007).

*Voľba orientácie DEA modelu*

Voľba orientácie DEA modelu v prvom rade závisí od formulovaného cieľa analýzy. V prípade, že sú cieľom analýzy odporúčania na strane vstupov, je vhodné voliť vstupne orientovaný DEA model. A naopak, v prípade, že sú cieľom analýzy odporúčania na strane výstupov, je vhodné voliť výstupne orientovaný DEA model. V prípade, že cieľom analýzy sú odporúčania na oboch stranách, je vhodné voliť neorientovaný DEA model.

Pri výbere orientácie DEA modelu môžu byť nápomocné i nasledujúce úvahy Golanyho a Rolla (1989) či Ramanathana (2003). V aplikáciách, kde sú vstupy pomerne nepružné, tzn. sú do istej miery určené vyššími manažérskymi úrovňami a teda nie úplne pod kontrolou DMUs, by bol vhodnejší výstupne orientovaný DEA model. Na druhej strane v aplikáciách, ktoré zahŕňajú nepružné výstupy, ktoré napr. úzko súvisia s cieľmi stanovenými manažmentom alebo sú obmedzené environmentálnymi podmienkami, môže byť vhodnejší DEA model zameraný na vstupy.

*Voľba predpokladu o výnosoch z rozsahu*

Jedným z najdôležitejších krokov pri výbere DEA modelu je identifikácia charakteru výnosov z rozsahu (returns to scale – RTS). V zásade možno predpokladať buď konštantné výnosy z rozsahu (constant returns to scale – CRS) alebo variabilné výnosy z rozsahu (variable returns to scale – VRS). Identifikácia RTS je jednou z najdiskutovanejších oblastí v DEA. Na tomto mieste je potrebné zdôrazniť, že sa tak deje na dvoch úrovniach: (1) na technologickej úrovni označovanej ako technologické výnosy z rozsahu (technological returns to scale – TRTS) a (2) na úrovni samotných DMUs. V procese výberu vhodného modelu DEA je dôležitá najmä prvá z nich tzn. identifikácia TRTS. Problematika identifikácie RTS na úrovni DMUs spočíva v identifikovaní RTS pre samotné DMUs a je v podstate až následnou procedúrou po aplikácii určitého DEA modelu. Na rozdiel od identifikácie RTS na úrovni DMUs, identifikáciu TRTS skúmalo iba niekoľko autorov. V DEA literatúre existujú dva hlavné prístupy k určeniu TRTS: (1) *subjektívny*, kde sú TRTS určené expertnými odhadmi a (2) *objektívny*, kde sú TRTS identifikované pomocou štatistických (napr. Banker, 1996; Banker a Natarajan, 2011) alebo neštatistických (napr. Alirezaee et al., 2018) metód.

Pri *subjektívnom prístupe* musí analytik vziať do úvahy to, že DEA modely pri predpoklade CRS neumožňujú potenciálnu existenciu úspor z rozsahu. Ak sa teda neočakáva, že výkonnosť DMUs môže závisieť od rozsahu činnosti (napr. porovnanie niekoľkých veľkých monopolov), voľba CRS predpokladu sa javí byť vhodnejšia. DMUs však môžu byť príliš malé (veľké) na to, aby fungovali s maximálnou produktivitou. VRS modely boli vyvinuté špeciálne na zohľadnenie

efektu rozsahu činností DMUs pri analýze. Je dobre známe, že VRS model bude vždy obaľovať údaje bližšie ako model CRS, bez ohľadu na to, či VRS existujú. Ak sa použije VRS model v prípade, kde neexistujú žiadne inherentné efekty rozsahu, bude mať efektívnosť malých a veľkých DMUs tendenciu byť nadhodnotená. A naopak, ak sa použije CRS model v prípade, kde sú zjavné inherentné efekty rozsahu, môžu byť malé a veľké DMUs veľmi diskriminované. Z tohto dôvodu je vhodné, ak nie je *a priori* známe, či technológia vykazuje CRS alebo VRS, použiť niektoré z *objektívnych prístupov*, ktoré testujú údaje osobitne z hľadiska efektov rozsahu.

*Systemizácia základných metodologických postupov DEA*

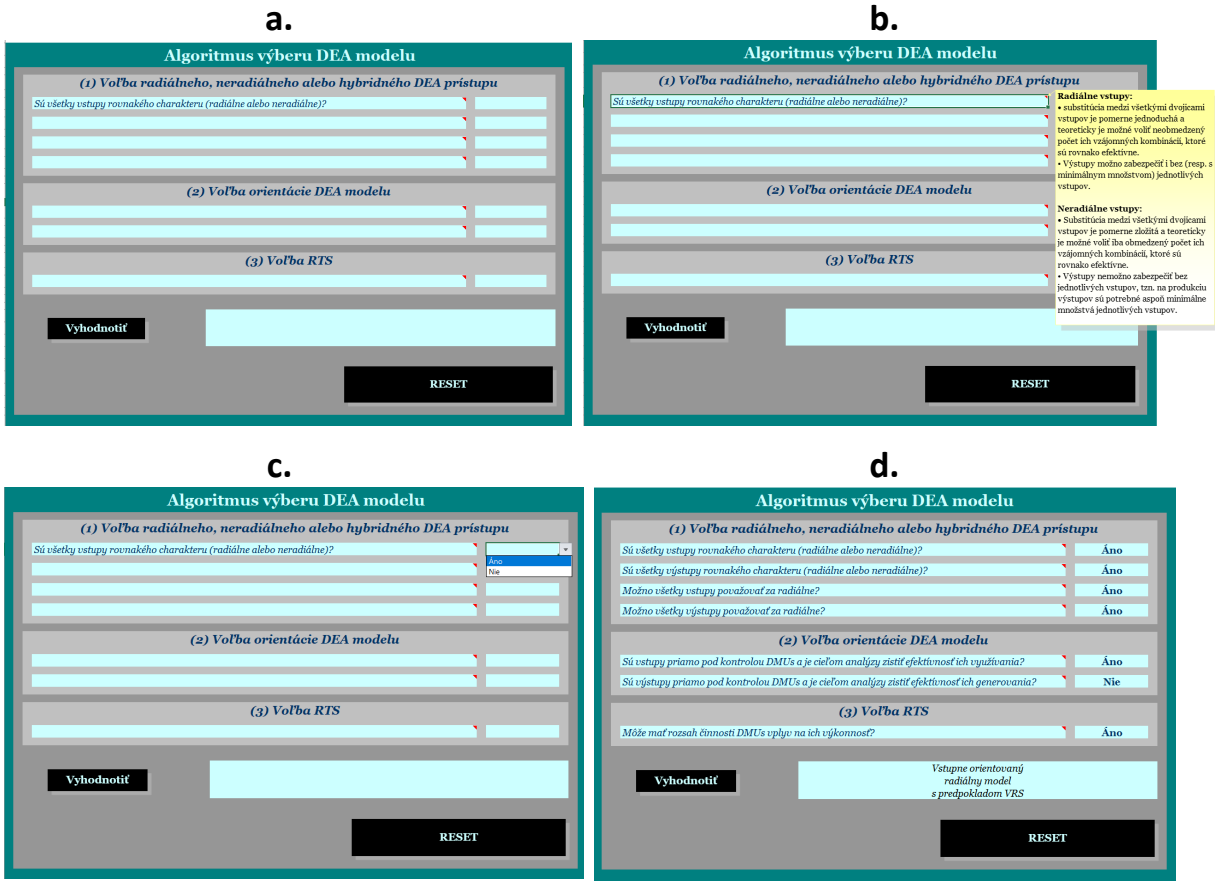
Výber a formulácia vhodného DEA modelu závisí predovšetkým od formulovaného problému a stanoveného cieľového stavu. Ako bolo spomenuté, pri výbere vhodného DEA modelu sú kritickými oblasťami najmä: (1) voľba radiálneho, neradiálneho alebo hybridného DEA prístupu, (2) voľba orientácie DEA modelu a (3) voľba predpokladu o výnosoch z rozsahu. Keďže výber DEA modelu na základe týchto troch oblastí je založený na predpoklade aspoň čiastočného poznania ekonomickej teórie efektívnosti a základnej DEA terminológie, na účely určitého zautomatizovania procesu výberu vhodného DEA modelu pre analytikov z rôznych oblastí riadenia bolo naším ďalším cieľom vytvoriť *jednoduchý algoritmus výberu DEA modelu*. Jeho účelom by malo byť uľahčenie relatívne náročného procesu výberu DEA modelu.

*Algoritmus výberu DEA modelu* bol zostavený formou otázok, ktoré sa štrukturalizujú podľa troch základných oblastí: (1) voľba radiálneho, neradiálneho alebo hybridného DEA prístupu, (2) voľba orientácie DEA modelu a (3) voľba výnosov z rozsahu. Štruktúru algoritmu bližšie prezentuje Tab. 1.

**Tab. 1** Štruktúra algoritmu výberu DEA modelu *(Zdroj: vlastné spracovanie)*

| **Otázka** | **Varianty odpovedí** | |
|---|---|---|
| **(1) Voľba radiálneho, neradiálneho alebo hybridného DEA prístupu** | | |
| Sú všetky vstupy rovnakého charakteru (radiálne alebo neradiálne)? | Áno | Nie |
| Sú všetky výstupy rovnakého charakteru (radiálne alebo neradiálne)? | Áno | Nie |
| Možno všetky vstupy považovať za radiálne? | Áno | Nie |
| Možno všetky výstupy považovať za radiálne? | Áno | Nie |
| **(2) Voľba orientácie DEA modelu** | | |
| Sú vstupy priamo pod kontrolou DMUs a je cieľom analýzy zistiť efektívnosť ich využívania? | Áno | Nie |
| Sú výstupy priamo pod kontrolou DMUs a je cieľom analýzy zistiť efektívnosť ich generovania? | Áno | Nie |
| **(3) Voľba RTS** | | |
| Môže mať rozsah činnosti DMUs vplyv na ich výkonnosť? | Áno | Nie |

Algoritmus výberu DEA modelu na obrázku 1 bol vytvorený v prostredí programu Microsoft Excel a je dostupný na internetovej stránke časopisu Forum Statisticum Slovacum spoločne s elektronickou verziou tohto článku (http://www.ssds.sk/sk/fss/fss202002). Pred použitím algoritmu sa odporúča súbor stiahnuť na disk. Keďže súbor obsahuje makrá, pri otvorení súboru je potrebné povoliť spúšťanie makier. Analytikovi sú postupne generované relevantné otázky, ktoré vedú v závere k návrhu vhodného DEA modelu na jeho riešený problém. Na to, aby bol model vygenerovaný je, po zodpovedaní poslednej otázky v sekcii (3) Voľba RTS, potrebné kliknúť na tlačidlo „Vyhodnotiť“. Tlačidlo „Reset“ vymaže predchádzajúcu voľbu a nastaví algoritmus do východiskového stavu. Algoritmus systematizuje tri základné typy DA modelov (radiálny, neradiálny a hybridný) pre tri možné orientácie modelov (vstupne orientované, výstupne orientované a neorientované modely) a dva možné predpoklady RTS (CRS a VRS), tzn. systematizuje spolu 18 základných DEA modelov.




**Obr. 1** Algoritmus výberu DEA modelu *(Zdroj: vlastné spracovanie)*

Všetky použité pojmy sú v príslušných otázkach bližšie definované formou komentárov k bunkám, ako to uvádza obrázok 1b. Na ich základe je analytik schopný bez potreby ďalšieho štúdia DEA problematiky zvoliť jednu z ponúkaných možností, čo vidno na obrázku 1c. Na konci algoritmu je po

zodpovedaní všetkých otázok priamo vygenerovaný názov toho DEA modelu, ktorý je vzhľadom na daný problém relatívne najvhodnejší, čo dosvedčuje obrázok 1d.

## 2.5 Kalkulácia DEA modelu

Na trhu existuje relatívne mnoho softvérových programov, ktoré umožnia kalkuláciu DEA modelu bez akýchkoľvek dodatočných technických zariadení. Tabuľka 2 prezentuje prehľad vybraných špecializovaných komerčných a nekomerčných programov určených na kalkuláciu DEA.

**Tab. 2** Štruktúra algoritmu výberu DEA modelu *(Zdroj: vlastné spracovanie)*

| **Komerčné balíky** | | **Nekomerčné balíky** | |
|---|---|---|---|
| **Program** | **Autor** | **Program** | **Autor** |
| DEA-Solver-Pro™ | K. Tone (Saitech, Inc.) | DEA-Solver-LV | K. Tone |
| Frontier Analyst® | Banxia Software Ltd. | DEAP | T. Coelli |
| PIM-DEAsoft | A. Emrouznejad, E. Thanassoulis | EMS | H. Scheel |
| xlDEA | Productivity Tools (www.prodtools.com) | PIONEER | T. McLoud, R. Barr |
| DEAFrontierTM | J. Zhu | MaxDEA Basic | Beijing Realworld Software Company Ltd. |

Navyše, keďže DEA predstavuje metódu založenú na riešení úloh LP, možno okrem špecializovaných softvérových produktov, využiť taktiež univerzálny a relatívne dostupný tabuľkový editor Microsoft Excel, v ktorom pomocou doplnku Riešiteľ (Solver) možno riešiť úlohy lineárneho a nelineárneho programovania. Táto možnosť má podstatný význam najmä v prípade, že na meranie efektívnosti je nutné využiť DEA model, ktorý obsahuje viacero špeciálnych nastavení.

## 2.6 Analýza stability výsledkov DEA

Výsledky DEA ako neparametrickej a neštatistickej metódy merania efektívnosti sú vo všeobecnosti relatívne citlivé tak na samotný výber DMUs, ako aj na výber uvažovaných vstupov a výstupov. Výsledky DEA by preto mali byť použité len po adekvátnej analýze citlivosti jej výsledkov. Analýza citlivosti (stability alebo robustnosti) je jednou z pomerne často študovaných tém v DEA literatúre. Niektorými zo základných postupov analýzy citlivosti (navrhnuté Smithom a Maystonom, 1987; Ahn a Seiford, 1993; Ramanathan, 2003) sú: (1) analýza založená na zvyšovaní a znižovaní počtu vstupov a výstupov, (2) analýza založená na zvyšovaní a znižovaní počtu DMUs a (3) analýza založená na použití rôznych DEA modelov.

## 3 Záver

Cieľom príspevku bolo poskytnúť stručný návod na to, ako je potrebné postupovať jednotlivými krokmi aplikácie DEA. Pre každý krok procesu aplikácie DEA boli načrtnuté niektoré všeobecné zásady, ako aj hlavné prístupy, ktoré sa v rámci nich najčastejšie využívajú. Príspevok obsahuje pomerne široký zoznam užitočných odkazov na literatúru, ktorý môže analytika, ktorý chce DEA využiť nasmerovať správnym smerom. V záujme zracionalizovať proces výberu vhodného DEA modelu vzhľadom na špecifické podmienky riešeného problému, bol v príspevku vytvorený algoritmus výberu DEA modelu na báze programu Microsoft Excel. Vytvorený algoritmus poskytuje prehľadný spôsob výberu DEA modelu vzhľadom na skúmaný problém. V závere je však nutné povedať, že vytvorený algoritmus poskytuje orientáciu len medzi základnými DEA modelmi a v prípade, že skúmaný problém má ďalšie špecifiká je nutné aplikovať pokročilejšie DEA prístupy.

## 4 Literatúra

Adler, N., Golany, B. (2001). *Evaluation of deregulated airline networks using data envelopment analysis combined with principal component analysis with an application to Western Europe*. European Journal of Operational Research, 132(2), 260-273.

Ahn, T., Seiford, L. M. (1993). *Sensitivity of DEA to models and variable sets in a hypothesis test setting: The efficiency of university operations*. In Creative and innovative approaches to the science of management, Ijiri, Y. (eds.), New York : Quorum Books, 1993, pp. 191-208.

Alirezaee, M., Hajinezhad, E., Paradi, J. C. (2018). *Objective identification of technological returns to scale for data envelopment analysis models*. European Journal of Operational Research, 266(2), 678-688.

Avilés-Sacoto, S. V., Cook, W. D., Güemes-Castorena, D., Zhu, J. (2020). *Measuring efficiency in DEA in the presence of common inputs*. Journal of the Operational Research Society, 71(11), 1710-1722.

Banker, R. D. (1996). *Hypothesis tests using data envelopment analysis*. Journal of Productivity Analysis, 7(2-3), 139-159.

Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W. (1984). *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis*. Management Science, 30(9), 1078-1092.

Banker, R. D., Natarajan, R. (2011). *Statistical tests based on DEA efficiency scores*. In Handbook on data envelopment analysis, Cooper, W. W., Seiford, L. M., Zhu, J. (eds.), Boston : Springer, 2011, pp. 273–295.

Coelli, T. J., Rao, D. S. P., O'Donnell, C., Battese, G. (2005). *An Introduction to efficiency and productivity analysis*. New York : Springer, 2005, 349 p.

Cook, W. D., Harrison, J., Imanirad, R., Rouse, P., Zhu, J. (2013). *Data envelopment analysis with nonhomogeneous DMUs*. Operations Research, 61(3), 666–676.

Cook, W. D., Seiford, L. M. (2009). *Data envelopment analysis (DEA) – thirty years on*. European Journal of Operational Research, 192(1), 1-17.

Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K. (2007*). Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA-Solver software*. Boston : Springer, Second Edition, 2007, 492 p.

Dyson, R., Allen, R., Camanho, A., Podinovski, V., Sarrico, C., Shale, E. (2001). *Pitfalls and protocols in DEA*. European Journal of Operational Research, 132(2), 245-259.

Emrouznejad, A., De Witte, K. (2010). *COOPER-framework: A unified process for nonparametric projects*. European Journal of Operational Research, 207(3), 1573-1586.

Farrell, M. J. (1957). *The measurement of productive efficiency*. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 120, Part III, 253-281.

Färe, R., Whittaker, G. (1995). *An intermediate input model of dairy production using complex survey data.* Journal of Agricultural Economics, 46(2), 201-213.

Golany, B., Roll, Y. (1989). *An application procedure for DEA*. Omega, 17 (3), 237-250.

Charnes, A., Cooper, W. W., Golany, B., Seiford, L., Stutz, J. (1985). *Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions*. Journal of Econometrics, 30(1-2), 91-107.

Charnes, A., Cooper, W., Rhodes, E. (1978). *Measuring the efficiency of decision making units*. European Journal of Operational Research, 2(6), 429-444.

Kao, C. (2014). *Network data envelopment analysis: A review*. European Journal of Operational Research, 239(1), 1-16.

Li, W., Liang, L., Cook, W. D., Zhu, J. (2016). *DEA models for non-homogeneous DMUs with different input configurations*. European Journal of Operational Research, 254(3), 946-956.

Limleamthong, P., Guillén-Gosálbez, G. (2018). *Mixed-integer programming approach for dimensionality reduction in data envelopment analysis: Application to the sustainability assessment of technologies and solvents*. Industrial & Engineering Chemistry Research, 57(30), 9866-9878.

Liu, J. S., Lu, L. Y., Lu, W. M., Lin, B. J. (2013). *A survey of DEA applications*. Omega, 41(5), 893-902.

Mehdiloo, M., Podinovski, V. V. (2019). *Selective strong and weak disposability in efficiency analysis*. European Journal of Operational Research, 276, 1154-1169.

Molinero, C. M. (2008). *Non-homogeneity in data envelopment analysis*. Working paper Number 163, Canterbury : University of Kent Canterbury.

Nataraja, N. R., Johnson, A. L. (2011). *Guidelines for using variable selection techniques in data envelopment analysis*. European Journal of Operational Research, 215(3), 662-669.

Ozbek, M. E., de la Garza, J. M., Triantis, K. (2009). *Data envelopment analysis as a decision-making tool for transportation professionals*. Journal of Transportation Engineering, 135(11), 822-831.

Peyrache, A., Rose, C., Sicilia, G. (2020). *Variable selection in data envelopment analysis*. European Journal of Operational Research, 282, 644-659.

Ramanathan, R. (2003). *An introduction to data envelopment analysis*. New Delhi : Sage Publications, 2003, 201 p.

Simar, L., Wilson, P. W. (2001). *Testing restrictions in nonparametric efficiency models*. Communications in Statistics – Simulation and Computation, 30(1), 159-184.

Smith, P., Mayston, D. (1987). *Measuring efficiency in the public sector*. Omega, 15(3), 181-189.

Tone, K. (2001). *A slack-based measure of efficiency in data envelopment analysis*. European Journal of Operational Research, 130(3), 498-509.

Tone, K. (2004). *A hybrid measure of efficiency in DEA*. GRIPS Policy Information Center, Research Report 1-2004-0003. [Dostupné na: http://www3.grips.ac.jp/~pinc/pdf/I-2004-0003.pdf]

## 5 Poďakovanie

Tento príspevok je publikovaný v rámci projektu VEGA [1/0843/18 Metodologické aspekty aplikácie DEA na hodnotenie efektívnosti produkčných jednotiek.]